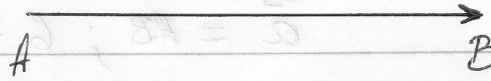
АГ ИВАНОВ 02.10.12

Насочена отсечка



$\vec{AB}$ $|\vec{AB}|$ - дължина

Равенство

ако

1. $AB \parallel CD$
2. $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$
3. едно посочени

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$

Св-ва

$\vec{BA} = -\vec{AB}$

1. $\vec{AB} = \vec{CD}$ то $\vec{CD} = \vec{AB}$ - симетричност
2. $\vec{AB} = \vec{CD}$ и $\vec{CD} = \vec{EF}$ то $\vec{AB} = \vec{EF}$ - транзитивност

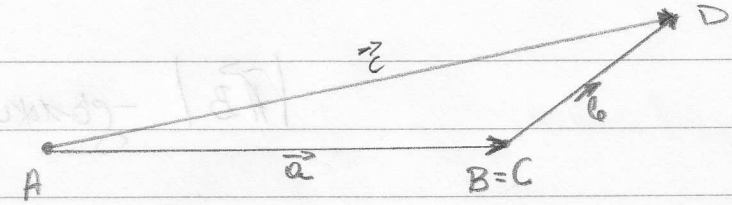
Дефиниция

Вектор - множеството от всички равни насочени отсечки

Св-ва на векторите

Събиране на вектори

$\vec{a} + \vec{b} = ?$ $\quad\leftarrow\quad \vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$



(черт 1)

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AD}$ – (черт 1)

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$! нулев вектор

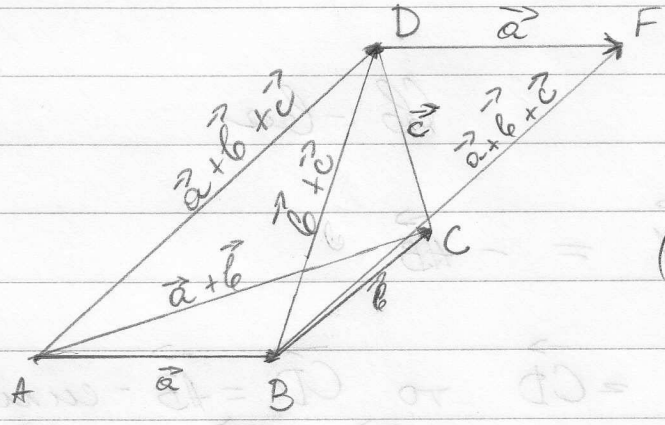
(1) Асоциативност

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ – (черт 2)

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BD}$

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AD}$



(черт 2)

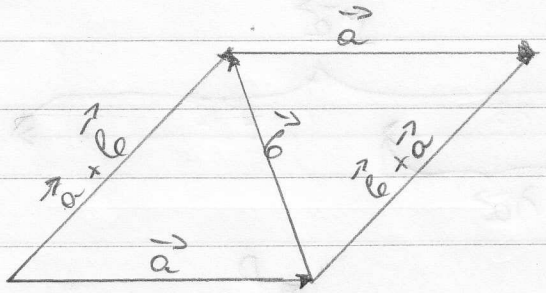
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BF}$ при $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BF}$ и { проекция на $\vec{a}$ и проекция на $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DF}$

(2) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(3) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

(4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – (черт 3)



(черт 3)

умножение на вектори с реални числа

$\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\lambda\vec{a} = ?$

при $\lambda = 0 \Rightarrow 0\vec{a} = \vec{0}$

при $\lambda = 1 \Rightarrow 1.\vec{a} = \vec{a}$

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$

посока

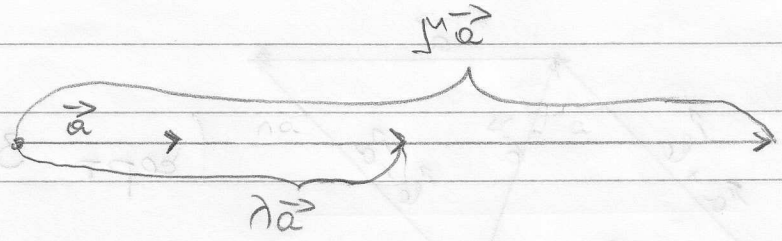
при $\lambda > 0$ то $\lambda\vec{a}, \vec{a}$ - еднопосочни

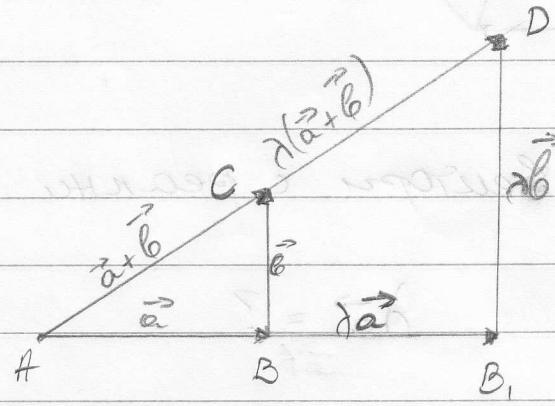
при $\lambda < 0$ то $\lambda\vec{a}, \vec{a}$ - разнопосочни

⑤ $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

⑥ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \vec{b}\lambda$ (черт 4)

⑦ $\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$





(черт. 4)

$\overrightarrow{AD} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{AB_1} = \lambda\vec{a}$; $\overrightarrow{B_1D} = \lambda\vec{b}$

~~*~~ доказателство се прави по теорема за подобие на триъгълници

в случая

$AC \in AD$; $AB \in AB_1$; $\sphericalangle BAC$ - общ $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AB_1D$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AB_1}{AB} = \lambda \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AB_1D \Rightarrow \overrightarrow{B_1D} = \lambda\vec{b}$

Дефиниция

Множеството вектори са векторно пространство (изпълнени са св-ва 1 ÷ 7)

Линейна зависимост на система вектори

(1) Система вектори $\vec{a_1}, \vec{a_2} \dots \vec{a_n}$ се нарича линейно зависима ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \neq 0$ (поне 1 от които е различно от 0) така че да е изпълнено равенството

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} + \dots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

Пример:

Нека разгледаме векторно пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

Системата от вектори $a_1(1,1,-1), a_2(0,1,1), a_3(1,2,0)$ е линейно зависима, тъй като

$$a_1 + a_2 - a_3 = 0 = (0,0,0) \quad \text{т.е.}$$

Забелязваме че векторите a_1, a_2, a_3 могат да се представят като линейна комбинация на останалите два или

$$a_1 = a_3 - a_2;\ a_2 = a_3 - a_1;\ a_3 = a_1 + a_2$$

(2) Система от един вектор е линейно зависима, точно когато този вектор е нулевият, система от поне два вектора е линейно зависима, точно когато поне един от тези вектори е линейна комбинация на останалите

(4) Система от вектори $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ се нарича линейно независима ако тяхното равенство е изпълнено точно когато

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \vec{0} \text{ и}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \dots = \lambda_k = 0$$

Пример:

Нека разгледаме векторно пространство $\mathbb{R}^3$ върху което $b_1(1,0,1)$, $b_2(2,1,-1)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda b_1 + \mu b_2 = \lambda(1,0,1) + \mu(2,1,-1) = (\lambda + 2\mu, \mu, \lambda - \mu)$$

приравняване към $\vec{0}$ т.е.

$(\lambda + 2\mu, \mu, \lambda - \mu) = (0,0,0)$ => система неравенства

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda + 2.0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda - 0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$$

т.е.

$\lambda = \mu = 0$ - векторите b_1 и b_2 са линейно независими

База на векторно пространство - V

(A) V - максимален брой линейно независими вектори

(T) **Всеки вектор се изразява по единствен начин - чрез база - V**

Нека $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 \dots + \lambda_n\vec{a}_n$ и $\vec{p} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2 \dots + \mu_n\vec{a}_n$ } доказване чрез извеждане т.е.

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{a}_1 + (\lambda_n - \mu_n)\vec{a}_n \Rightarrow$$

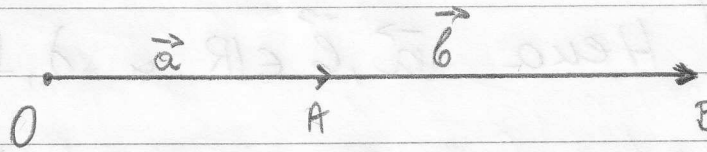
$$\lambda_1 - \mu_1 = 0$$
$$\lambda_n - \mu_n = 0$$

Твърдение 1:

$\vec{a}, \vec{b}$ - линейно зависими ($\lambda \neq 0$)

$\vec{a} = \lambda\vec{b}$ (колинеарни)

$\vec{a}, \vec{b}$ - колинеарни (черт 5)



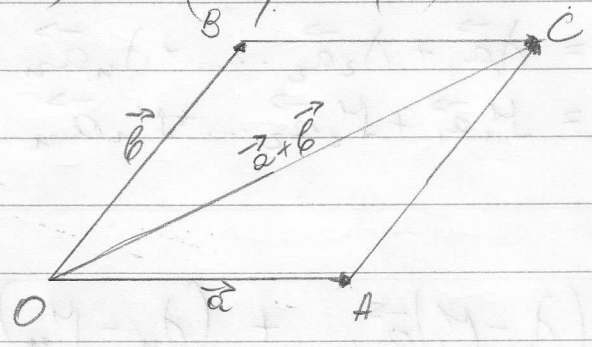
(черт 5)

$$\vec{OA} = \vec{a} = \lambda\vec{OB} \Rightarrow \lambda = \frac{|\vec{OA}|}{|\vec{OB}|}$$ бързи / при $\lambda \neq 0$

Линейно зависими вектори (колинеарност)

Пример:

В успоредника $OABC$ векторите $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ са линейно независими, тъй като очевидно не са колинеарни (сключват ъгъл с големина от 0° до 180°). (черт. 6)



(черт. 6)

Докато векторите $\vec{OA}$ и $\vec{BC}$, както и $\vec{OB}$ и $\vec{AC}$ са линейно зависими, защото $\vec{OB}=\vec{AC}$ и $\vec{OA}=\vec{BC}$ т.е. Системата от вектори $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ е линейно зависима, тъй като

$$\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OC}$$

Пример:

Нека $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}$$

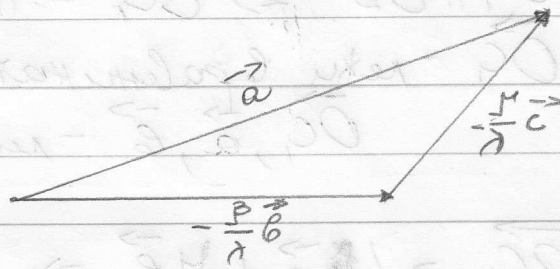
т.е. $\vec{a}, \vec{b}$ - колинеарни

(4) Три вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато лежат в една равнина

Пример:

$$\lambda\vec{a} + \beta\vec{b} + \mu\vec{c} = \vec{0} \qquad \lambda, \beta, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\lambda}\vec{b} - \frac{\mu}{\lambda}\vec{c}$$ (черт 7)

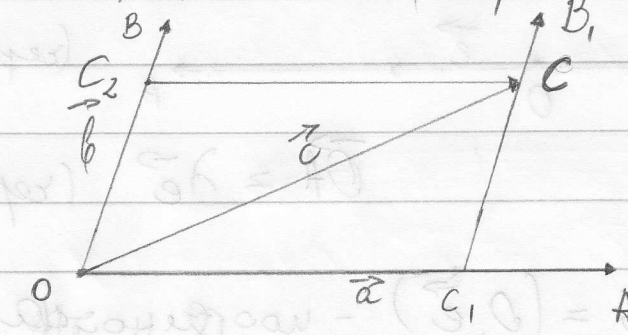


(черт 7)

Пример

Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарни (лежат в една равнина)

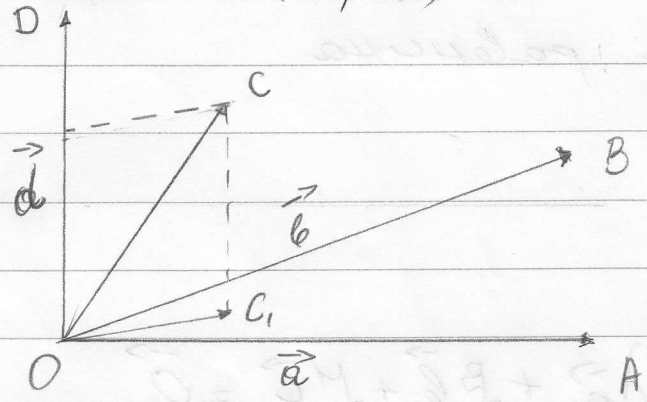
Нека $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ (черт. 8)



(черт 8)

$$\left.\begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OC_1} + \vec{C_1C} \\ \vec{OC_1} &= \lambda\vec{OA} = \lambda\vec{a} \\ \vec{C_1C} &= \mu\vec{OB} = \vec{OC_2} = \mu\vec{b} \end{aligned}\right\} \vec{OC} = \vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

(A) Четири вектора са винаги линейно зависими (черт 9)



(черт 9)

$\vec{OC} = \vec{OC_1} + \vec{C_1C}$

$\vec{CC_1} \parallel \vec{OD} \Rightarrow \vec{CC_1} = \lambda\vec{OD}$

$\vec{OC_1}$ - лежи в равнината $(OA, OB) \Rightarrow$

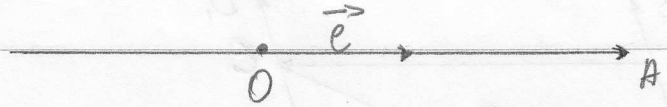
$\vec{OC_1}, \vec{a}, \vec{b}$ - линейно зависими

$$\vec{OC_1} = \alpha\vec{a} + \mu\vec{b} \Rightarrow \lambda\vec{OD} = \lambda\vec{d} = \vec{CC_1}$$

т.е.

$$\vec{OC} = \alpha\vec{a} + \mu\vec{b} + \lambda\vec{d}$$

Разглеждане вектори в координатна система (пространство)



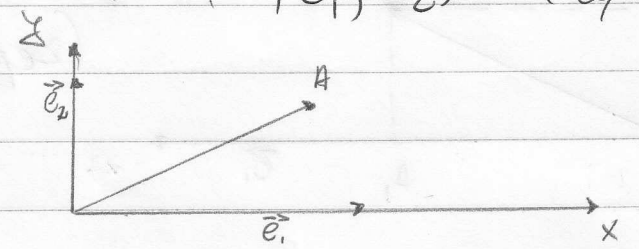
(черт 10)

$\vec{OA} = \lambda\vec{e}$ (черт 10)

$\mathcal{L} = (O, \vec{e})$ - координатна система

Пример

$K = (O, e_1, e_2)$ (черт 11)



(черт 11)

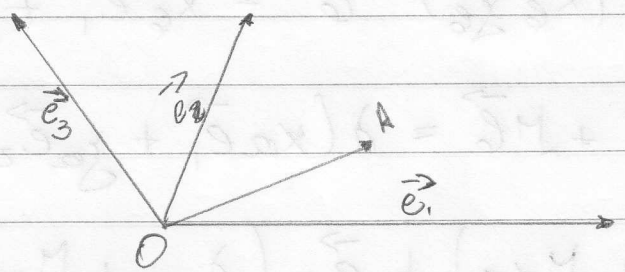
$\vec{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

$A \leftrightarrow (xy)$ при $K = Oe_1e_2$

$x\,y$ - единствени защото $e_1\,e_2$ - линейно независими

Пространство

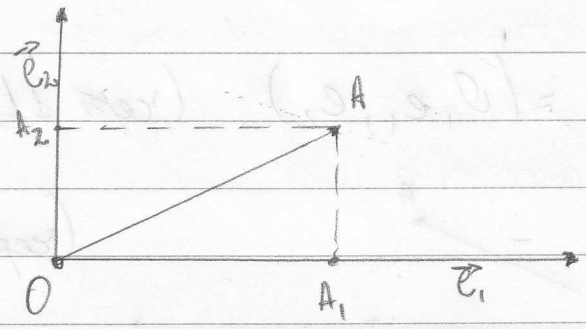
$K = Oe_1e_2e_3$ (черт 12)



(черт (12)

$\vec{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

$A \leftrightarrow (xyz)$



(черт 13)

$\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{AA_1} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$ (черт 13)

където

$x\vec{e_1} = \frac{|OA_1|}{|e_1|} \text{ sign } \vec{e_1}$

$y\vec{e_2} = \frac{|OA_2|}{|e_2|} \text{ sign } \vec{e_2}$

Нека $\vec{a}(x_a y_a)$ $\vec{a} = x_a\vec{e_1} + y_a\vec{e_2}$

$\vec{b}(x_b y_b)$ $\vec{b} = x_b\vec{e_1} + y_b\vec{e_2}$

$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \lambda(x_a\vec{e_1} + y_a\vec{e_2}) + \mu(x_b\vec{e_1} + y_b e_2) =$

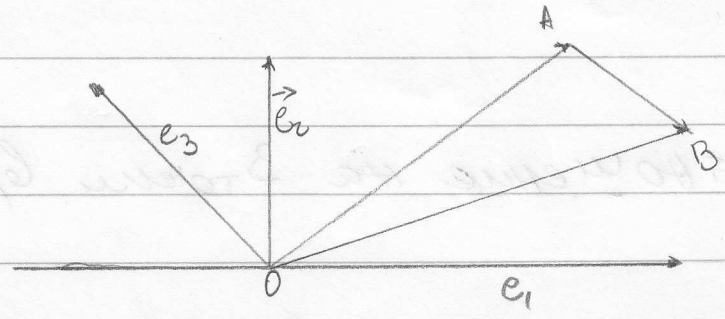
$= \vec{e_1}(\lambda x_a + \mu x_b) + \vec{e_2}(\lambda y_a + \mu y_b) \Rightarrow$

$\vec{c} = \vec{e_1}(\lambda x_a + \lambda x_b) + \vec{e}(\mu y_a + \mu y_b)$

(4) Координата на линейна комбинация от вектори е линейна комбинация от координати

$A(x_A y_A z_A)$

$B(x_B y_B z_B)$

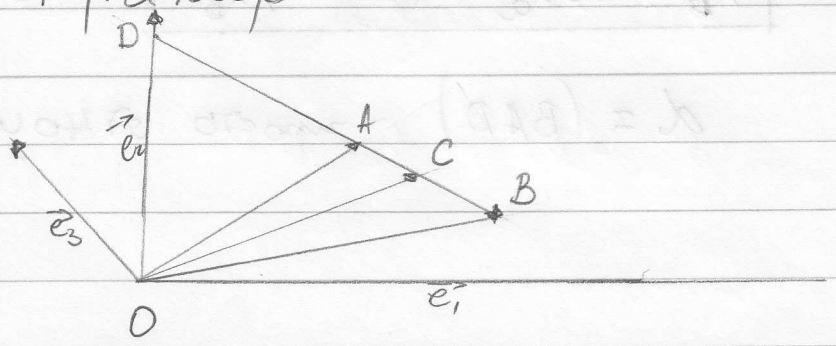


(черт 14)

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B\vec{e}_1 + y_B\vec{e}_2 + z_B\vec{e}_3) - (x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3) =$$

$$= \vec{e}_1(x_B - x_A) + \vec{e}_2(y_B - y_A) + \vec{e}_3(z_B - z_A) \quad (\text{черт } 14)$$

Пример



$\vec{AC} = \vec{BC}$

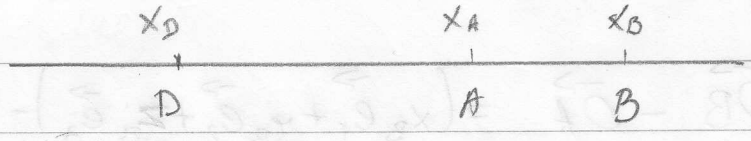
черт (15)

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} \Rightarrow \vec{OB} + \frac{\vec{AB}}{2} \quad \text{черт (15)} \Rightarrow$$

$$\vec{OB} + 1/2(\vec{OA} - \vec{OB}) = 1/2(\vec{OB} + \vec{OA}) \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2}, \frac{z_B + z_A}{2} \quad \text{и} \quad \vec{BD} = \lambda\vec{BA}$$

Просто отношение на 3 точки в/у права



$\overrightarrow{BD} = \alpha \overrightarrow{BA}$

D дели AB в отношение α

формула $\boxed{x_D = \alpha x_a + (1-\alpha) x_B}$ $\alpha = \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BA}|} \operatorname{sign}$

$\alpha = (BAD)$ - просто отношение